
Syllabus on Probability USTC-LIU 2022.12

1. Random variable, Expectation, Independence

Variance and covariance, correlation, moment

概率论中几个基本概念；独立性是随机数学最独特的一个概念；矩是随机变量的数字特征，作用与实分析 L_p 空间相似，关联大数定律与中心极限定理成立的条件，在随机数学中各种估计中扮演重要角色

2. Various distribution functions, Multivariate distribution

一定要记住典型分布例子：伯努利分布，二项分布，几何分布，Poisson分布，均匀分布，指数分布，正态分布

明白伽马与贝塔分布的来源，熟练掌握多元正态分布的定义与性质，记住二元标准正态分布的联合密度(可表示为与两独立一元正态分布线性组合)

3. Characteristic function, Generating function, Various modes of convergence of random variables

变换即对偶，在数学、物理与工程科学中都是极其重要的思想，是概率论中刻画随机变量同分布、独立性与弱收敛的重要工具。依分布收敛(即弱收敛)最有概率色彩，几乎处处收

敛即概率意义下逐点收敛，依概率收敛与矩收敛各具特色。
四种收敛既区分又有联系，难在灵活应用。

4. Bayes formula, Conditional probability, Conditional expectation given a sigma-field

先熟练掌握离散与连续型随机变量条件期望，再掌握给定事件域下条件期望与简单性质

5. Laws of large numbers Central limit theorems

概率论中最代表性结果，与独立性概念一起构成随机数学的灵魂。一定要灵活运用强大数定律，尤其与中心极限定理的综合运用。矩估与Markov不等式往往在极限定理处理中起重要作用。

6. Martingales, Markov chains, Basic properties of Poisson processes and Brownian motion

随机过程的最常见形式，掌握最基本概念与性质

References:

Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, Cambridge University Press, 2010

Kai-Lai Chung: A Course in Probability Theory, New York, 1968.

邱赛概率统计竞赛教纲大部分内容概率论本科课堂上讲过 (Ref 1) , 下面5个知识点例外.

i) Conditional expectation given a sigma-field ii) Martingales

iii) Markov chains iv) Basic properties of Poisson processes

v) Basic properties of Brownian motion

教材 6.1-6.8 解决 iii) iv); 7.7-7.10 解决 ii); v) 参见 8.5, 13.2; i)
参见 Ref 2

建议:

Ref 1 1-7 章各小节与每一章中习题做完

Ref 2&3 认真研读, 尽量做大纲范围内部分习题

Ref 1: G. R. Grimmett, D. Stirzake, Probability and Random Processes 3rd, 2001

Ref 2: Kai-Lai Chung: A Course in Probability Theory, 机械工业出版社, 2010

Ref 3: Rick Durrett: Probability: Theory and Examples, Cambridge University Press, 2010

2022

1 正态分布、依分布收敛 2 全变差距离、概率耦合 3
期望计算 4 Markov 链

2021

1 四种收敛，一致可积条件 2 Markov 链 3 大数律，
矩方法 4 随机矩阵，有限域上可逆矩阵 新潮

2020

1 不等式 2 Poisson 分布 Stein 方法 新潮 3 随机游走
4 正态分布

2019

1 iid 情形收敛 2 马氏链 3 iid 系数随机级数 新潮

2018

1 贝叶斯 2 圆上随机游走 3 组合，分布列，极限分
布 4 多元正态

2017

1 组合，期望 2 二叉树上随机游走 3 无限 Bernoulli
乘积空间 新潮 4 ER-随机图 连通概率 新潮 5 马氏
过程 PDE 新潮

2016

1 平面上随机游走 2 iid 元素随机矩阵 算子范数估计
新潮 3 组合, 方差 4 期望 5 iid 变量之和, 随机游走
背景

2015

1. 关联 (正态) 随机变量不等式, 条件期望 教材题目
2. 随机游走 教材题目 3. 独立正态序列, 无穷级
数收敛

2014

1. 正态分布 Stein 方法 **新潮** 2. 不相关序列和 a.s. 收敛
3. RN 导数, 事件域下条件期望

2013

1. 序列依概率收敛, Borel-Cantelli, 上极限
2. 二元正态分布条件概率 3. iid 序列极值, 方差

2012

1. 组合概率和依概率收敛 2 事件域条件期望和二元正
态条件期望 3 二维离散向量, 条件概率 5. 不相关但
不独立例子

高频率知识点

1 随机游走与马氏链

2 四种收敛性, 无穷级数, B-C 引理, 三级数定理

3 正态与多元正态, 布朗运动简单性质

4 组合概率与随机变量期望 (条件期望)

5 概率论前沿新潮题目

例如, 随机矩阵, 随机多项式与级数的零点, Stein 方法, 图上简单随机游走, 概率测度间距离 (Wasserstein 距离, 全变差距离等)

TEAM

2019

1. iid 指数分布, 上极限, B-C 引理 教材题目
2. 强 LLN 充要条件, 教材定理
3. 随机置换循环数, 期望极限, Durrett 题目
4. ER 随机图 孤立点临界行为 **新潮**

2018

- 1 iid 均匀分布, 顺序统计量极限分布
- 2 iid 几何分布, 概率计算
- 3 & 4 难读懂

2017

- 1 随机几何, 高维概率估计 **新潮**
- 2 依概率与矩收敛
- 3 马氏链?
- 4 Z^d 上随机游走

2016

- 1 二叉树上随机游走
- 2 集中不等式现象
- 3 圆上离散均匀分布
- 4 iid 上极限, B-C
- 5 圆上随机点, 弧长概率

2015

1. 组合概率
- 2 随机指标随机变量依分布收敛

3 指数随机变量构造狄里克莱分布

4 二元正态

2014

1 依概率, 依分布收敛 教材题目

2 随机变量比值分布

3 条件期望, RN 导数, 独立

2013

1. 特征函数 2 有理数逼近 **新潮** 3 事件域下条件期望

2012

1.iid 序列 上极限, B-C 2 随机指标独立和 3 独立随机变量不等式 4 独立 Bernoulli 和奇偶性 **新潮**

2022-2023 本科生讨论班

重基础 重解题 拓视野 玩综合

K1 随机游走与马氏链

K2 四种收敛性, 无穷级数, B-C 引理, 三级数定理

K3 正态与多元正态, 布朗运动简单性质

K4 组合概率与随机变量期望 (条件期望)

K5 概率论前沿新潮题目 (见下面英文 5 部分内容)

例如, 随机矩阵, 随机多项式与级数的零点, Stein 方法, 图上简单随机游走, 概率测度间距离 (Wasserstein 距离, 全变差距离等), 随机矩阵, 随机多项式与级数的零点, Stein 方法, 图上简单随机游走, 概率测度间距离 (Wasserstein 距离, 全变差距离等)

1. Random Matrices

2. Random Polynomials and Random Series

3. (Multivariate) Normal Distribution,

Stein-Chen Method for Gaussian and Poisson Distributions

4 Probability metrics (total variance
Wasserstein distance

5 Concentration inequality

Refs:

1 R. Durrett, Probability

2 L. H. Chen, L. Goldstein, Q.-M. Shao, Normal
Approximation by Stein's Method

3 T. Tao, Topics on Random Matrix Theory

讨论班内容分配 下面主题各讲 1 次

L1 随机游走与马氏链

L2 无穷级数, 三级数定理

L3 正态与多元正态, 布朗运动简单性质

L4 Random Matrices

L5 Stein-Chen Method for Gaussian and Poisson Distributions

L6 Stein-Chen Method for Gaussian and Poisson Distributions

L7 Probability metrics (total variance Wasserstein distance)

L8 Concentration inequality

讨论班基本要求

- (i) 认真准备材料, 提炼最重要的概念和结果
- (ii) 要讲理论的应用和例子, 参考往年题目
- (iii) 要发言, 积极参与讨论, 讲过的知识点要会

2022 寒假作业

一
Ref 1: G. R. Grimmett, D. Stirzake, Probability and
Random Processes 3rd, 2001

1-7 章每章最后一节问题中精选部分做完

二 读读 Durrett 相关章节并做里面题目

Rick Durrett: Probability: Theory and Examples,
Cambridge University Press, 2010